

## تحقیق در عملیات ۲ جلسه هفتم نمونه مسائل حل شده

(مسئله اول) باتوجه به جدول داده شده به پرسشهای بعدی پاسخ دهید.

۱- ماتریس  $B^{-1}$  در این جدول کدام است؟

$X_B$	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	RHS
Z	?	۰	۰	$\frac{3}{2}$	?
$S_1$	$\frac{3}{2}$	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۱
$X_2$	$\frac{1}{2}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۳

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

۲- مقدار منبع دوم ( $S_2$ ) از مدل اولیه کدام است.

۳ (د)

۵ (ج)

۶ (ب)

۸ (الف)

۳- مقدار منبع اول ( $S_1$ ) از مدل اولیه کدام است.

۷ (د)

۶ (ج)

۵ (ب)

۴ (الف)

۴- مقدار Z در جدول کدام است؟

۴,۵ (د)

۷,۵ (ج)

۹ (ب)

۱۲ (الف)

۵- مقدار  $X_1$  در سطر تابع هدف جدول در صورتیکه ضرایب فنی نظیر  $X_1$  در مسئله اولیه برابر  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $C_{X_1} = 1$  باشد کدام

است؟

$\frac{1}{3}$  (د)

۳ (ج)

۲ (ب)

$\frac{1}{2}$  (الف)

پاسخ مسئله ۱:

۱- (ب)

حل:  $B^{-1}$  ماتریس مربوط به ستن های نظیر متغیرهای اساسی اولین تابلو است در اینجا متغیر مصنوعی وجود ندارد بنا بر این در اولین تابلو  $X_B = (S_1, S_2)$  پس ستونهای نظیر  $S_1, S_2$  در تابلوی جاری ماتریس  $B^{-1}$  را مشخص می کنند.

۲- (ب)

حل:

$$B^{-1}b = \bar{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 - \frac{1}{2}b_2 = 1 \\ \frac{1}{2}b_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 6 \end{cases}$$

در اینجا  $b_1$  نشان دهنده موجودی منبع اول ( $s_1$ ) و  $b_2$  نشان دهنده موجودی منبع دوم ( $s_2$ ) در اولین تابلو است

۳- (الف)

۴- (ب) مقدار تابع هدف از ضرب موجودی منابع در تابلوی اول در قیمت سایه ای آنها در تابلوی فعلی بدست می آید

$X_B$	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	RHS
Z	?	0	0	$\frac{3}{2}$	?
$S_1$	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
$X_2$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3

$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 6 \end{cases}$$

$$Z = (4)(0) + (6)\left(\frac{3}{2}\right) = 9$$

۵- (د)

$$\bar{C}_{x_1} = C_B \bar{P}_{x_1} - C_{x_1} \text{ داریم}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_{x_1} = [0 \quad C_{x_1}] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{2} C_{x_2} - 1 \quad (1)$$

بنا بر این باید مقدار  $C_{x_2}$  را محاسبه نماییم

$$\Rightarrow 9 = [0 \quad C_{x_2}] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3C_{x_2} \quad C_{x_2} = 3$$

با جایگذاری در رابطه (1) داریم  $\bar{C}_{x_1} = \frac{1}{2}$

(مسئله دوم) با توجه به مدل برنامه ریزی خطی و جدول سیمپلکس داده شده به پرسشهای بعدی پاسخ دهید.

$$MAX Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s.t

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	RHS
Z						
$x_3$						
$x_1$						

۱- معکوس ماتریس جدول نهایی کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \\ -1 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \\ -1 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

۲- در صورتیکه  $C_x = [5 \ 2 \ 3]$  (ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف) و  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \\ -1 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

در این صورت قیمت‌های سایه‌ای منابع کدام است؟

الف  $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$       ب  $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$       ج  $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$       د  $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

۲- چنانچه مقادیر سمت راست مسئله اولیه  $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$  باشد مقدار  $b_1$  در جدول نهایی کدام است

الف  $\frac{6}{5}$       ب  $\frac{7}{5}$       ج  $\frac{9}{5}$       د  $\frac{17}{5}$

حل مسئله ۲:

۱- برای محاسبه معکوس ماتریس نهایی ملاحظه می‌شود که متغیرهای اساسی در تابلوی نهایی به ترتیب  $x_1$  و  $x_3$  هستند بنا بر این ماتریس  $B$  بر اساس ستون‌نظیر این متغیرها در محدودیتها مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7 \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

بنا بر این گزینه (د) درست است.

۲- (ج)

حل: قیمت سایه‌ای از مقدار نظیر متغیرهای اساسی تابلوی اول (در اینجا  $s_1, s_2$ ) در سطر صفر تابلوی نهایی بدست می‌آید.

$x_B$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$RHS$
$Z$						
$x_2$				$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	
$x_1$				$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{s_1} &= C_B \bar{P}_{s_1} - C_{s_1} \text{ داریم} \\
 &= [3 \quad 5] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{bmatrix} - 0 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5} \bar{C}_{s_1} \\
 &= [3 \quad 5] \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} - 0 = \frac{7}{5} \bar{C}_{s_2}
 \end{aligned}$$

۳-د) داریم:  $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

(مسئله سوم) مدل برنامه ریزی خطی و تابلوی آخر آن داده شده است:

$$MAX Z = 3x_1 + x_2$$

s.t

{

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱) متغیرهای اساسی تابلوی سیمپلکس داده شده کدام گزینه است؟

(الف)  $s_1, s_2$  (ب)  $R_1, R_2$  (ج)  $x_1, x_2$  (د)  $x_1, x_2, R_1$

۲) مقدار  $a$  کدام گزینه است؟

(الف)  $\frac{1}{2}$  (ب)  $-\frac{1}{2}$  (ج)  $\frac{3}{2}$  (د)  $-\frac{3}{2}$

۳) مقدار  $b$  کدام گزینه است؟

(الف)  $M$  (ب)  $M - \frac{1}{2}$  (ج)  $\frac{1}{2}$  (د)  $M - \frac{1}{2}$

۴) مقادیر  $e, d, c$  کدام گزینه است؟

(الف) ۵ و ۴ و ۲ (ب) ۳ و ۴ و ۲ (ج) ۳ و ۲ و ۱ (د) ۵ و ۱ و ۲

۵) مقدار  $f$  کدام گزینه است؟

(الف) ۱- (ب) صفر (ج)  $\frac{1}{2}$  (د)  $-\frac{1}{2}$

حل:

۱- ج

با توجه به اینکه متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  در تابلوی دوم به صورت یکه ظاهر شده اند بنا بر این متغیرهای اساسی هستند.

۲- ج

$$\bar{p}_{s_1} = B^{-1} p_{s_1}$$

$$\bar{C}_{s_1} = C_B \bar{P}_{s_1} - C_{s_1} \text{ داریم}$$

$$= [3 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = \frac{5}{2} \bar{C}_{s_1}$$

۳- ب برای محاسبه مقدار  $b$  باید  $\bar{C}_{R_1}$  محاسبه شود

$$= [3 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-M) = M - \frac{1}{2} \bar{C}_{R_2} = C_B \bar{P}_{R_2} - C_{R_2}$$

یادآوری تابع هدف از نوع Max می باشد در روش M بزرگ (روش Penalty (جریمه)) تابع هدف در حالت حداکثر سازی با افزودن -MR جریمه می شود.

۴(د)

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow e = 2, d = 1$$

$$Z = C_B \bar{b} = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 2 = 5 \rightarrow c = 5$$

جواب (۵ و ۲)

مسئله چهارم

در محاسبات سیمپلکس به روش تجدید نظر شده ستون لولا در یکی از مراحل محاسبه به صورت  $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  می باشد و عنصر

لولا نیز  $\frac{7}{3}$  است در این صورت اگر  $B_{old}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ماتریس  $B^{-1}$  مرحله بعد کدام گزینه است.

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{د)}$$

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ج)}$$

جواب (د)

ابتدا معکوس عنصر لولا را بدست می آوریم و سپس سایر عناصر را در قرینه معکوس ضرب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

در مرحله بعد ماتریس مقدماتی  $E$  را بدست می آوریم برای این کار بردار بدست آمده را در ستون هم شماره با سطر عنصر لولا (در اینجا سطر شماره یک) ماتریس واحد قرار می دهیم:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $E = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{-2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$  حال با توجه به رابطه  $B_{new}^{-1} = EB_{old}^{-1}$  این روابط را خواهیم داشت

$$B_{new}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{-2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$



**تکلیف:** با توجه به مدل و تابلوهای داده شده مقادیر تمام مراحل را بدست آورید

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$XB$	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$RHS$
$Z$								
$s_1$					1	0	0	
$s_2$					0	1	0	
$s_3$					0	0	1	
$Z$								
$s_1$					1	-1	0	
$x_2$					0	1/2	0	
$s_3$					0	-3/2	1	
$Z$								
$x_1$					1/2	-1/2	0	
$x_2$					-1/4	3/4	0	
$s_3$					-1/4	-5/4	1	