

نمونه مسائل و نکات مهم در درس تحقیق در عملیات ۱ (قسمت اول)

- (۱) در مورد هر کدام از ویژگیهای یک مسئله برنامه ریزی خطی توضیح دهید ۱- تناسب ۲- جمع پذیری ۳- قطعی بودن ۴- بخش پذیری (به درس جلسه اول مراجعه شود)

مثالهایی از مدلسازی:

مثال (۱) مدلسازی تولید: اطلاعات مربوط به تولید و سود دو محصول ۱ و ۲ در جدول داده شده است. در این صورت با هدف حداکثر سازی سود و رعایت سقف موجودی هر کدام از مواد اولیه مسئله را مدل سازی کنید.

میزان مصرف ماده A به ازای هر واحد تولید	میزان مصرف ماده B به ازای هر واحد تولید	سود فروش هر واحد از محصول	محصول
۱۵	۱۰	۴۵	۱
۱۰	۱۵	۵۰	۲
۳۰۰۰	۲۵۰۰	سقف موجودی هر ماده اولیه	

حل:

تعیین متغیرهای تصمیم:

فرض کنیم میزان تولید از محصول ۱ را با X_1 و میزان تولید از محصول ۲ را با X_2 نشان دهیم.

تعیین تابع هدف:

چون هدف حداکثر سازی سود است بنابر این داریم. $MAX Z = 45X_1 + 50X_2$

تعیین محدودیت ها:

میزان مصرف هر کدام از مواد A, B نباید بیشتر از سقف موجودی آنها باشد.

بنابراین داریم:

$$0.3X_1 + 15X_2 \leq 10 \quad \text{محدودیت موجودی در منبع A}$$

$$15X_1 + 10X_2 \leq 2500 \quad \text{محدودیت موجودی در منبع B}$$

بنابر این مدل به این صورت خواهد بود.

$$\text{MAX } Z = 45X_1 + 50X_2$$

Subject to:

$$0.3X_1 + 15X_2 \leq 3000$$

$$15X_1 + 10X_2 \leq 2500$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (۲) تخصیص

سه مربی برای سه تیم والیبال در نظر گرفته شده است اطلاعات مربوط به هزینه های مربیان در جدول داده شده است با توجه به جدول و با فرض اینکه برای هر تیم تنها یک مربی و برای هر مربی تنها یک تیم در نظر گرفته شده است و با هدف حداقل سازی هزینه های مربیان مسئله را مدل سازی کنید.

حل: با توجه به جدول به عنوان مثال اگر مربی ۱ با تیم A کار کند ۵۰ واحد مالی

هزینه خواهد داشت ولی همین مربی با تیم B به میزان ۸۰ واحد مالی هزینه خواهد داشت.

تیم مربی	A	B	C
۱	۵۰	۸۰	۷۰
۲	۴۰	۷۰	۸۰
۳	۷۰	۲۰	۴۰

تعیین متغیر های تصمیم: در اینجا متغیرهای تصمیم را دو بعدی انتخاب می کنیم به عنوان مثال X_{ij} نشان دهند متغیر اختصاصی مربی دوم به تیم C می باشد که می تواند یکی از مقادیر صفر و یا یک را داشته باشد که اگر این تصمیم انجام نشود صفر و اگر این تصمیم انجام شود مقدار یک را به خود خواهد گرفت.

تعیین تابع هدف: با توجه به هزینه های جدول و هدف حداقل سازی داریم.

$$\text{Min } C = 50X_{1A} + 80X_{1B} \dots \dots + 40X_{3C}$$

تعیین محدودیتها:

الف: هر مربی فقط باید با یک تیم کار کند.

$$\begin{cases} X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} = 1 \\ X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} = 1 \\ X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} = 1 \end{cases}$$

ب: هر تیم تنها باید یک مربی داشته باشد.

$$\begin{cases} X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} = 1 \\ X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} = 1 \\ X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} = 1 \end{cases}$$

ج: هر مربی برای هر تیم یا انتخاب میشود یا انتخاب نمی شود.

$$X_{ij} = 0 \text{ or } 1, i = 1, 2, 3 \quad j = A, B, C$$

بطور خلاصه مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } C = 50X_{1A} + \dots \dots + 40X_{3C}$$

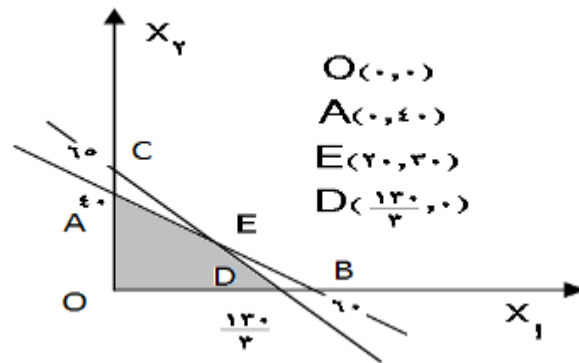
S.T

$$\begin{cases} X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} = 1 \\ X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} = 1 \\ X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} = 1 \\ X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} = 1 \\ X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{ij} = 0 & \text{اگر مربی } i \text{ برای تیم } j \text{ انتخاب نشود} \\ X_{ij} = 1 & \text{اگر مربی } i \text{ برای تیم } j \text{ انتخاب شود.} \end{cases}$$

مثال از روش ترسیمی :



باتوجه به ناحیه داده شده و مختصات گوشه های موجه چنانچه تابع هدف به صورت:

$$\text{Min } Z = 3X_1 - 2X_2 \text{ باشد}$$

الف) در این صورت کدام گوشه بهینه خواهد بود.

ب) نقطه به مختصات (50, 40) موجه است و یا غیر موجه استدلال نمایید.

پاسخ الف) مقادیر تمام گوشه های موجه را در تابع هدف قرار می دهیم چون هدف حداقل سازی است گوشه ای که کمترین مقدار را تولید کند گوشه بهینه خواهد بود با جای گذاری مشخص می شود که داریم:

$$Z_{\min} = Z(A) = Z(0, 40) = 3(0) - 2(40) = -80$$

پاسخ ب) با توجه به مختصات گوشه های موجه در شکل نقطه (40 و 50) بیرون ناحیه موجه قرار می گیرد پس

نقطه ای غیر موجه است.

مثال از روش M بزرگ

$$\text{MAX } Z = 10X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 = 160 \\ X_1 + 3X_2 \geq 60 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الف: مدل را به صورت استاندارد بنویسید برای مدل داده شده

ب: اولین تابلو را ایجاد کنید

ج: با ذکر دلیل متغیرهای ورودی و خروجی تابلوی اول را مشخص نمایید

د: متغیرهای خانه های $R_2-X_1, R_1-X_1, Z-X_1$ در تابلوی بعدی چه مقادیری خواهند داشت (محاسبات لازم را توضیح دهید)

$$\text{MAX } Z = 10X_1 + 11X_2 - MR_1 - MR_2$$

Subject to:

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + R_1 = 6 \\ X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 2 \\ X_1, X_2, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{cases}$$

پاسخ الف: مدل
استاندارد

پاسخ ب: تابلوی اول

			۱۰	۱۱	۰	-M	-M	۰
	XB	Z	X۱	X۲	S۲	R۱	R۲	RHS
	Z	۱	-۴M-۱۰	-۷M-۱۱	M	۰	۰	-۸M
-M	R۱	۰	۳	۴	۰	۱	۰	۶
-M	R۲	۰	۱	۳	-۱	۰	۱	۲

پاسخ ج:

باتوجه به منفی ترین ضریب M در سطر صفر X_2 ورودی به پایه خواهد بود و از نسبت مقادیر سمت راست به مقادیر نظیر غیر منفی در ستون لولا مشخص می شود که R_2 متغیر خروجی خواهد بود ($2/3 < 6/4$)

پاسخ د:

$$R_2 - X_1 = 1/3 \quad (1)$$

$$R_1 - X_1 = 3 - (4/3) = 5/3 \quad (2)$$

$$Z - X_1 = -M(1/3) - M(5/3) - 10 = -2M - 10 \quad (3)$$

رابطه ۱ براساس تقسیم سطر لولا بر عنصر لولا

رابطه ۲ براساس مقدار جدید = مقدار قدیم منهای (ضرب عناصر نظیر در سطر و ستون لولا تقسیم بر عنصر لولا)

رابطه ۳ هم براساس روش ۲ و وهم براساس ضرب عناصر نظیر ستون متغیر مورد بررسی در عناصر نظیر ستون حاشیه ای منهای ضریب تابع هدف متغیر بدست می آید.

مثال از روش دو مرحله ای:

مسئله با توجه به مدل داده شده مطلوب است

الف) فرم استاندارد مدل برای اجرای روش دوفاز (دو مرحله ای)

$$\min Z = 20X_1 + 70X_2$$

Subject to:

$$80X_1 + 60X_2 \geq 4800$$

$$20X_1 + 90X_2 \geq 4200$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

پاسخ الف

به کمک متغیرهای مصنوعی تساوی را ایجاد نموده و تابع هدف در این فاز را حداقل سازی مجموع متغیرهای

مصنوعی قرار می دهیم بنا بر این خواهیم داشت:

$$\min (R.) = R_1 + R_2 \rightarrow \max(-R.) = -R_1 - R_2$$

Subject to

$$\begin{cases} 80x_1 + 60x_2 - S_1 + R_1 = 4800 \\ 20x_1 + 90x_2 - S_2 + R_2 = 4200 \\ x_1, x_2, R_1, R_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

ب) اگر آخرین تابلوی فاز یک به صورت زیر باشد براساس آن اولین تابلوی فاز ۲ را بدست آورید:

			۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
	X_B	R_0	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
	R_0	-۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
-۱	S_2	۰	۱۰	۰	-۹/۶۰	۱	۹/۶۰	-۱/۱۰	۳۰۰
۰	X_2	۰	۱/۳	۱	-۱/۶۰	۰	۱/۶۰۰	۱/۱۰۰	۵۰

پاسخ ب

برای ایجاد اولین تابلوی فاز دو براساس آخرین تابلوی فاز یک این مراحل را اجرا می کنیم:

۱- ستونهای نظیر متغیرهای مصنوعی را حذف می کنیم

۲- مقادیر سطر صفر قبلی را حذف می کنیم

۳- ضرایب حاشیه ای افقی و عمودی را بر اساس تابع هدف اصلی می نویسیم

۴- به کمک ستونهای نظیر هر متغیر و ضرایب حاشیه ای نظیر آن مقدار سطر صفر جدید را محاسبه می

کنیم (مطابق روش محاسبه سطر صفر در سیمپلکس معمولی)

			-۲۰	-۷۰	۰	۰	۰
	X_B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
	Z	-۱	-۱۰/۳	۰	۷/۶	۰	-۳۵۰۰
۰	S_2	۰	۱۰	۰	-۹/۶۰	۱	۳۰۰
-۷۰	X_2	۰	۱/۳	۱	-۱/۶۰	۰	۵۰

به عنوان مثال مقدار جدید سطر صفر مربوط به ستون S_1 از رابطه $7/6 = 0 - (-9/60) + (-70)(-1/60)$ بدست می آید

ج) در تابلوی بدست آمده با ذکر دلیل متغیرهای ورودی و خروجی را نام ببرید.

پاسخ ج) X_1 ورودی و S_2 خروجی خواهد بود زیرا منفی ترین مقدار در سطر صفر X_1 است و کمترین نسبت سمت راست به مقادیر نظیر مثبت ستون لولا عدد ۳۰ خواهد بود بنا براین خروجی متغیر S_2 خواهد بود.