

نمونه مسائل و نکات مهم در درس تحقیق در عملیات ۱ (قسمت دوم)

مثال از روش سیمپلکس ثانویه

با توجه به مدل داده شده به پرسشهای زیر پاسخ دهید

$$\text{Min } z = 80x_1 + 100x_2$$

Subject to

$$\begin{cases} 80x_1 + 60x_2 \geq 1500 \\ 20x_1 + 90x_2 \geq 1200 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الف) مدل داده شده به روش ثانویه قابل حل است چرا؟

ب) مدل را به شکل استاندارد برای حل به روش ثانویه بنویسید:

ج) اولین تابلو مربوط به روش ثانویه را بنویسید.

د) متغیرهای ورودی و خروجی را برای اولین تابلو مشخص کنید.

پاسخ (الف)

شرایط حل به روش ثانویه وجود دارد زیرا تابع به صورت "عبارت خطی با ضرایب مثبت $\text{Min } Z =$ "

است (البته در صورتی که تابع هدف به صورت "عبارت خطی با ضرایب منفی $\text{Max } Z =$ " باشد نیز می توان مدل را با روش ثانویه حل نمود.

پاسخ (ب)

ابتدا با ضرب تابع هدف و محدودیتهای بزرگتر مساوی در منفی یک مدل را به شکل استاندارد (Max, \leq) می نویسیم و سپس به کمک متغیرهای کمکی تساوی را ایجاد میکنیم:

اطلاعات را مانند روش سیمپلکس معمولی وارد اولین تابلو می کنیم

$$MAX(-Z) = -80x_1 - 100x_2$$

Subject to

$$\begin{cases} -80x_1 - 60x_2 + S_1 = -1500 \\ -20x_1 - 90x_2 + S_2 = -1200 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

			-80	-100	0	0	0
	XB	Z	X₁	X₂	S₁	S₂	RHS
	Z	-1	80	100	0	0	0
0	S₁	0	-80	-60	1	0	-1500
0	S₂	0	-20	-90	0	1	-1200

پاسخهای ج و د در شکل بالا مشخص شده است متغیر خروجی منفی ترین مقدار سمت راست و متغیر ورودی کمترین مقدار نسبت سطر صفر بر قدر مطلق عناصر منفی نظیر است $(80/80 < 100/60)$

مثال از دوگان سازی:

مسئله دوگان مدل داده شده را بنویسید:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

Subject to:

$$\begin{cases} 2X_1 - 3X_2 + 1X_3 = 6 \\ 2X_1 + 2X_2 - 1X_3 \geq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

X_3 آزاد در علامت

حل برای ساخت دوگان باید مطابق جدول تبدیلات زیر محاسبات را انجام دهیم

مسئله اولیه (مسئله ثانویه)		مسئله اولیه (مسئله ثانویه)
متغیر تصمیم		محدودیت
ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف		اعداد سمت راست (RHS)
متغیرهای تصمیم با مقدار نامنفی		محدودیتهای به صورت نامعادله
متغیر آزاد در علامت		محدودیتهای به صورت تساوی
ضریب متغیر نظیر محدودیت		ضریب فنی متغیر تصمیم در هر محدودیت
تابع هدف Max		تابع هدف Min

حاصل این تبدیلات مدل زیر خواهد بود

$$\text{MAX } Y = 6Y_1 + Y_2$$

Subject to:

$$2Y_1 + 2Y_2 \leq 5$$

$$-3Y_1 + 2Y_2 \leq 2$$

$$Y_1 - Y_2 = 1$$

آزاد در علامت Y_1 و $Y_2 \geq 0$

مثالهایی از بررسی حالات خاص:

مثال ۱) در حل یک مدل به تابلوی زیر رسیده ایم آیا این تابلو حالت خاصی را نشان می دهد ؟ استدلال نمایید.

XB	Z	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	RHS
Z	۱	۰	$\frac{-7}{3} + \frac{1}{3}M$	M	۰	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}M$	$\frac{100}{3} - \frac{4}{3}M$
R_1	۰	۰	$\frac{-1}{3}$	-۱	۱	$\frac{-2}{3}$	$\frac{40}{3}$
x_1	۰	۱	$\frac{2}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{25}{3}$

پاسخ: با توجه به این تابلو مقادیر سطر صفر غیر منفی است (یادآوری M عددی مثبت و بسیار بزرگ است بنا براین مقدار نظیر x_2 در سطر صفر عددی مثبت است) پس ظاهراً مدل بهینه است ولی وجود متغیر مصنوعی R_1 در پایه با مقدار نظیر مخالف صفر ($\frac{4}{3}$) در ستون RHS به معنای این است که گوشه نظیر این تابلو در ناحیه غیر موجه است و بنابر این جواب نظیر این تابلو غیر موجه است از طرفی محاسبات را نمی توان ادامه داد زیرا هیچ متغیر منفی برای ورود به پایه وجود ندارد بطور خلاصه مدل فاقد ناحیه موجه است و جوابی برای آن وجود ندارد.

مثال ۲) در حل یک مدل به تابلوی زیر رسیده ایم آیا این تابلو حالت خاصی را نشان می دهد ؟ استدلال نمایید.

XB	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	۱	۰	۰	-۳	۲	۱۷۰۰
x_2	۰	۰	۱	۰	۱	۷۰۰
x_1	۰	۱	۰	-۱	۱	۴۰۰

در این تابلو متغیر ورودی s_1 است ولی چون ستون نظیر این متغیر در محدودیتها تنها عناصر منفی و صفر دارد امکان تعیین متغیر خروجی وجود ندارد و لذا در این مثال، هم مدل دارای ناحیه موجه بیکران است و هم جواب مدل به صورت $Z=\infty$ خواهد بود.

بطور خلاصه: هر گاه ستون یکی از متغیرها در محدودیتها تنها دارای مقادیر صفر و یا منفی باشد ناحیه موجه مدل در راستای آن متغیر بیکران است ولی در مورد اینکه آیا مقدار تابع هدف نیز نامتناهی است نمی توان اظهار نظر کرد حال اگر ستون لولا، ستون منفی نیز باشد می توان نتیجه گرفت که اولاً ناحیه موجه مدل در راستای متغیر نظیر ستون لولا نامتناهی است و ثانیاً جواب تابع هدف نامتناهی است ($Z=\infty$).

مثال ۳) در حل یک مدل به تابلوی زیر رسیده ایم

الف) آیا این تابلو حالت خاصی را نشان می دهد ؟ استدلال نمایید.

ب) ورود کدام متغیر به پایه اثری بر مقدار تابع هدف نخواهد داشت؟

XB	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{۵}{۴}$	۰	$\frac{۲۵}{۲}$
S ₁	۰	۰	۱	۱	-۱	۰	۲
X ₁	۰	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۵}{۲}$
S ₃	۰	۰	$\frac{۳}{۴}$	۰	$\frac{-۱}{۴}$	۱	$\frac{۳}{۲}$

پاسخ: حالت خاص بهینه چند گانه را داریم زیرا تعداد صفهای سطر صفر بیش از تعداد متغیرهای اساسی است، متغیر X₂ غیر اساسی است ولی در سطر صفر مقدار آن صفر است در این حالت می توان متغیر X₂ را به عنوان ورودی در نظر گرفت و متغیر خروجی را نیز با همان روش کمترین نسبت مثبت مشخص نماییم (در اینجا S₃) و تابلوی بعدی را بدست آوریم در این حالت نیز مقدار Z برابر $\frac{۲۵}{۴}$ خواهد بود.

مثال ۴) مراحل حل یک مدل در تابلوی زیر نشان داده شده است این مدل چه حالت خاصی را دارد استدلال نمایید: هر کدام از تابلوها را بر اساس متغیرهای خروجی تحلیل کند

XB	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	RHS
Z	۱	-۶	-۵	۰	۰	۰	۰
S ₁	۰	۳	۲	۱	۰	۰	۶۰
S ₂	۰	۲	۱	۰	۱	۰	۴۰
S ₃	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۲۵
Z	۱	۰	-۱	۲	۰	۰	۱۲۰
X ₁	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	۲۰
S ₂	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	۱	۰	۰
S ₃	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۱	۵
Z	۱	۰	۰	۱	۰	۳	۱۳۵
X ₁	۰	۱	۰	۱	۰	-۲	۱۰
S ₂	۰	۰	۰	-۱	۱	۱	۵
X ₂	۰	۰	۱	-۱	۰	۳	۱۵

پاسخ: در اولین تابلو دو متغیر S₁, S₂ شرط خروجی شدن را دارند زیرا با توجه به ستون لولا:

$25 = 20 + 5/1$ ، $20 = 40/2$ ، $20 = 60/3$ که در این صورت کمترین مقدار مثبت عدد ۲۰ است که نظیر متغیرهای اساسی S_1, S_2 است یکی از این دو را به دلخواه برای خروج از پایه انتخاب می کنیم مثلاً S_2 و تابلوی بعدی را تشکیل می دهیم در تابلوی دوم متغیر و یا متغیرهایی که شرط خروجی را داشته اند ولی انتخاب نشده اند با مقدار سمت راست صفر ظاهر می شوند (در اینجا S_2) تابلوی دوم در این مسئله نظیر یک گوشه تبهگن است با ادامه حل چون مقدار نظیر در ستون لولای تابلوی دوم برای RHS با مقدار صفر عددی منفی است متغیر نظیر آن انتخاب نمی شود و متغیر دیگری که شرط خروج را دارد انتخاب می گردد (در اینجا S_3) به همین دلیل در تابلوی بعدی حالت تبهگنی از بین رفته و در آخرین تابلو نیز گوشه تبهگن نداریم با توجه به غیر منفی شدن تمام مقادیر سطر صفر در تابلوی سوم به جواب بهینه می رسیم در این مثال گوشه تبهگن برای ناحیه موجه وجود دارد ولی جواب بهینه روی گوشه تبهگن نیست در چنین حالتی می گوییم حالت خاص گوشه تبهگن موقت (تباهیدگی موقت) پیش آمده است.

مثال ۵) مراحل حل یک مدل در تابلوی زیر نشان داده شده است این مدل چه حالت خاصی را دارد استدلال نمایید: هر کدام از تابلوها را بر اساس متغیرهای خروجی تحلیل کند

Xb	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
Z	۱	-۴	-۵	-۲	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۳	۲	۱	۰	۳۰
S_2	۰	۲	۲	۱	۰	۱	۲۰
Z	۱	-۷/۳	۰	۴/۳	۵/۳	۰	۵۰
X_2	۰	۱/۳	۱	۲/۳	۱/۳	۰	۱۰
S_2	۰	۴/۳	۰	-۱/۳	-۲/۳	۱	۰
Z	۱	۰	۰	۳/۴	۱/۲	۷/۴	۵۰
X_2	۰	۰	۱	۳/۴	۱/۲	-۱/۴	۱۰
X_1	۰	۱	۰	-۱/۴	-۱/۲	۳/۴	۰

پاسخ: در این جدول برای اولین تابلو دو متغیر S_1, S_2 به صورت همزمان شرایط خروج از پایه را دارند $10 = 20/2 = 30/3$ بنا براین یکی از آنها به عنوان خروجی به دلخواه انتخاب می شود (در اینجا S_1)

در تابلوی بعدی سمت راست متغیری که شرط خروج را داشته ولی انتخاب نشده است صفر خواهد شد در تابلوی دوم متغیر خروجی همان متغیر نظیر صفر است و بنا براین صفر در سمت راست حفظ می شود(سطر لولا/عنصر لولا)

تابلوی سوم بهینه است همچنین تبهگن نیز هست بنا براین حالت خاص گوشه بهینه تبهگن پیش آمده است.

مثال ۶) اگر در مدل داده شده متغیر X_2 آزاد در علامت باشد در این صورت تابع هدف و محدودیت زیر را براساس تغییر متغیر مناسبی بازنویسی نمایید بطوریکه حالت استاندارد متغیرهای مثبت در مدل برقرار شود.

$$Max Z = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

$$X_1 + X_2 + 5X_3 \leq 60$$

پاسخ: اگر X_2 آزاد در علامت باشد در این صورت تغییر متغیر به صورت $X_2 = X'_2 - X''_2$ را خواهیم داشت

پس از تغییر متغیر تابع هدف به صورت زیر بازنویسی خواهد شد: $Max Z = 3X_1 + 4X'_2 - 4X''_2 + 5X_3$

همچنین محدودیت به این صورت بازنویسی می شود: $X_1 + X'_2 - X''_2 + 5X_3 \leq 60$

مثال از تحلیل اقتصادی عناصر تابلوهای سیمپلکس

مسئله با توجه به تابلوهای زیر که مراحل حل یک مدل را به روش سیمپلکس بیان می کند به پرسشهای مطرح شده پاسخ دهید:

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	۹/۲	-۱/۲	۰	۰	۵/۲	۱۱۵۰
S_1	۰	۱/۲	۳/۲	۰	۱	-۱/۲	۲۰۰
X_3	۰	۳/۲	۱/۲	۱	۰	۱/۲	۲۳۰
Z_0	۱	۱۴/۳	۰	۰	۱/۳	۷/۳	۳۶۵۰/۳
X_2	۰	۱/۳	۱	۰	۲/۳	-۱/۳	۴۰۰/۳
X_3	۰	۴/۳	۰	۱	-۱/۳	۲/۳	۴۹۰/۳

۱) باتوجه به تابلوی دوم ورود فعالیت X_1 چه اثری در منبع اول و فعالیت سوم خواهد داشت عدد $9/2$ در سطر صفر این ستون چه مفهومی دارد؟

پاسخ: طبق اطلاعات این ستون برای تولید هر یک واحد X_1 باید $\frac{1}{4}$ از منبع اول مصرف شود و از تولید X_3 به میزان $\frac{3}{4}$ کاسته شود (زمانی که تولید X_3 کاهش می یابد منابع مربوط به تولید آن مصرف نمی شوند و می توان آنها را در تولید X_1 بکار برد)

عدد سطر صفر مربوط به X_1 به این صورت محاسبه می شود:

سود حاصل از تولید هر واحد از X_1 - زیان حاصل از مصرف $\frac{1}{4}$ واحد از منبع اول - زیان حاصل از $\frac{3}{4}$ کاهش در تولید X_3 = سود خالص هر واحد تولید X_1

این موارد با توجه به ضرایب تابع هدف مشخص می شود $9/2 = -(5)(3/2) - (0)(1/2) - (3)(1)$

سود منفی به معنای ضرر است به همین دلیل این فعالیت نمی تواند ورودی باشد. (با توجه به روش سیمپلکس این فعالیت را نمی توان ورودی در نظر گرفت زیرا مقدار نظیر آن در سطر صفر عددی مثبت است)

۲) باتوجه به تابلوی دوم عناصر سمت راست این تابلو را تحلیل کنید.

برای تولید ۲۳۰ واحد از محصول X_3 تمام موجودی منبع دوم مصرف می شود (این متغیر در این تابلو اساسی نیست بنا بر این مقدار نظیر آن صفر می شود). و از منبع اول $230 - 200 = 30$ واحد مصرف خواهد شد.

۳) الف) مفهوم قیمت سایه ای را توضیح دهید. ب) باتوجه به تابلوی داده شده قیمت سایه ای منابع در این مدل را مشخص نمایید ج) کدام یک از منابع مدل کمیاب در نظر گرفته می شوند؟ د) مقدار تابع هدف را به کمک قیمت سایه ای منابع محاسبه کنید.

پاسخ الف) برای قیمت سایه ای تفاسیر مختلفی وجود دارد که سه مورد آنها در اینجا بیان می شود:

۱- آهنگ افزایش تابع هدف به ازای یک واحد افزایش منبع

۲- ارزش افزوده مربوط به هر منبع در فرآیند تولید

۳- حداکثر قیمتی که پرداخت آن برای افزایش یک واحد از منبع مقرون به صرفه است.

پاسخ ب) در تابلوی بهینه در سطر صفر اعدادی که زیر ستونهای نظیر متغیرهای اساسی اولین تابلو هستند (در

اینجا S_1, S_2) نشان دهنده قیمت سایه ای هر کدام از منابع هستند

در این تابلو قیمت سایه ای منابع اول و دوم به ترتیب $7/3, 1/3$ هستند.

پاسخ ج) منبعی که قیمت سایه ای آن در تابلوی بهینه مخالف صفر است منبع کمیاب نامیده می شود

بنا بر این در این مدل منابع اول و دوم کمیاب هستند .

پاسخ د) مقدار تابع هدف در تابلوی بهینه از مجموع ضرب قیمت سایه ای هر منبع در موجودی اولیه آنها نیز بدست می آید

به عنوان مثال در این تابلو قیمت سایه ای منابع اول و دوم به ترتیب $7/3, 1/3$ است بنا بر این داریم:

$$(1/3)(430) + (7/3)(460) = 3650/3$$

۴) با توجه به تابلوی بهینه داده شده قیمت سایه ای منابع این مدل را بدست آورید

XB	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	R ₁	R ₂	RHS
Z ₀	-۱	۰	۰	۵/۴	۳۵/۴	M-(۵/۴)	M-۳۵/۴	-۴۵
X ₂								
X ₁								

پاسخ)

چون مدل حالت غیر استاندارد دارد در تابلوی بهینه قیمت سایه ای هر منبع بر اساس ستون متغیر مصنوعی نظیر آن در تابع هدف بدست می آید و در صورتیکه این منبع تنها متغیر کمکی نظیر داشته باشد بر اساس ستون متغیر کمکی نظیر بدست می آید در حالتی که مقدار نظیر قیمت سایه ای منبعی شامل

M است عبارت شامل M را حذف می کنیم و قدر مطلق باقیمانده عبارت را به عنوان قیمت سایه ای در نظر می گیریم چون در اینجا نظیر منابع اول و دوم متغیر مصنوعی داریم قیمت سایه ای آنها بر اساس R_1, R_2 محاسبه می شود برای محاسبه قیمت سایه ای منبع اول داریم قیمت سایه ای = قدر مطلق عبارت پس از حذف M که در اینجا حاصل قدر مطلق $-5/4$ یعنی $5/4$ می شود به طور مشابه قیمت سایه ای منبع دوم برابر $35/4$ خواهد شد.